

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen	1
1.1. Grundbegriffe.....	1
1.2. Funktionslehre	1
1.3. Relationen	2
1.4. Ungleichungen.....	3
1.5. Betragfunktionen:	3
1.6. Ungleichungen in der Ebene	4
1.7. Gleichungssysteme	4
1.8. Tangenten-Gleichung	5
2. Boolesche Algebra	6
2.1. Verknüpfungen:	6
2.2. Normalformen (Normalisieren)	6
3. Vektor Geometrie	8
3.1. Grundregeln.....	8
3.2. Ebenen	8
3.3. Raumflächen	9
3.4. Spezielles im Vektorrechnen	9
4. Matrizen	9
4.1. Grundregeln.....	9
4.2. Eigenwerte, Eigenvektore.....	9
4.3. Umformen eines Gleichungssystems in eine Matrix.....	10
5. Komplexe Zahlen	11
5.1. Grundregeln.....	11
5.2. Winkelfunktionen und Komplexe Zahlen	11
5.3. Potenzieren	12
5.4. Radizieren	12
5.5. Multiplizieren Komplexer Zahlen.....	12
5.6. Division komplexer Zahlen.....	12
5.7. Komplexe Gleichungen	13
6. Mehrdimensionale Extremalstellen	14
6.1. Schnittdarstellung	14
6.2. Differenzieren einer mehrdimensionalen Funktion	15
6.3. Extremalstellen in Mehrdimensionalen Funktionen	16

1. GRUNDLAGEN

1.1. GRUNDBEGRIFFE

N : die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Z die Menge aller ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

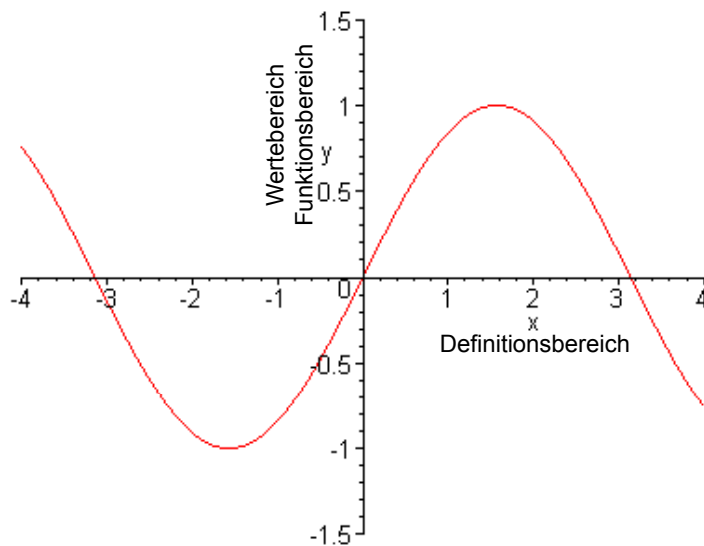
Q die Menge aller rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$$

R die Menge aller reellen Zahlen

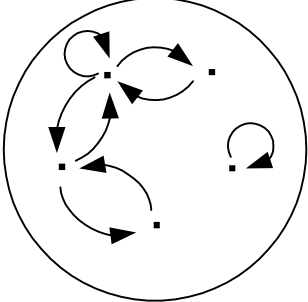
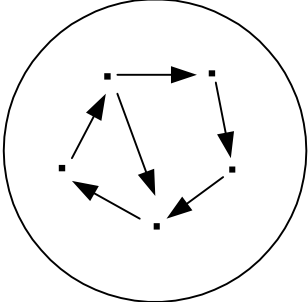
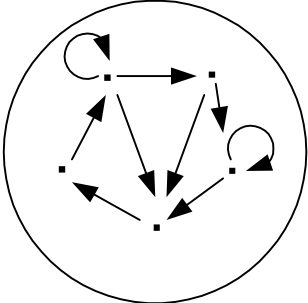
$$\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, e, \pi, \dots\}$$

1.2. FUNKTIONSLEHRE



Injektiv (eindeutig)	Jedes Argument in A darf nur ein Bild in B haben; in jedem Bildpunkt darf nur ein Pfeil enden.	
Surjektiv	Jeder Funktionswert muss mindestens ein Argument (in A) haben.	
Bijektiv (eindeindeutig)	Jedes Argument darf nur einen Funktionswert haben.	

1.3. RELATIONEN

Eine Funktion heisst:	wenn	Bild
Reflexiv:	Für alle x gilt xRx	
Irreflexiv:	Für kein x gilt xRx	
symmetrisch	Wenn aus xRy stets folgt yRx	
asymmetrisch	Wenn kein Paar vertauschbar ist: $(x, y) \in R$	
Antisymmetrisch (identitiv)	Wenn für verschiedene (x, y) niemals xRy und yRx zugleich gilt.	
transitiv	Wenn aus xRy und yRz stets auch xRz folgt. $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	
Äquivalenzrelation	Eine Relation die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.	
Strenge Ordnungsrelation	Eine Relation die asymmetrisch und transitiv ist.	

1.4. UNGLEICHUNGEN

Ungleichungen sind wie folgt anzugehen:

	Schritt	$\left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot (x-1) > 0$
1.	Die Definitionsmenge bestimmen:	$D = \{x \neq 1 \ \& \ x \neq 0 \ \& \ x \neq -1\}$
2.	Vereinfachen der Ungleichung (null setzen)	$\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0$
3.	Kritische Punkte festlegen:	$\{1, -1, 0\}$
4.	Lösen der Ungleichung:	
5.	Grenzwertbetrachtungen	(keine)

1.5. BETRAGFUNKTIONEN:

	Schritt	$ 2 \cdot x + 1 + 3 \cdot x - 2 \cdot x - 1 + x < 0$
1.	Fallunterscheidungen (kritische Punkte)	1) $2 \cdot x + 1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$ 2) $3 \cdot x < 0 \Rightarrow x < 0$ 3) $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$
2.	Lösungsgebieteinteilung:	
3.	Für die 4 Abschnitte Gleichungen aufstellen und lösen: !!! Wenn der Betragsinhalt negativ wird wechseln die Vorzeichen!!!	

1.6. UNGLEICHUNGEN IN DER EBENE

Bei Ungleichungen mit zwei Unbekannten, wird das Lösungsgebiet in der Ebene eingegrenzt:

	Schritt	$ 4 \cdot x - 2 + x + y - 3 \geq 2$
1.	Kritische Geraden:	1. $4 \cdot x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ 2. $x + y - 3 < 0 \Rightarrow y < -x + 3$
2.	<p>Die Zeichenebene nach den kritischen Geraden in verschiedene Teilgebiete aufteilen.</p> <p>Die Hauptgleichung spezifisch den Teilgebieten (Achtung: wenn der Betragsinhalt negativ wird wechseln die Vorzeichen) lösen und die Lösungsmenge einfärben.</p>	

1.7. GLEICHUNGSSYSTEME

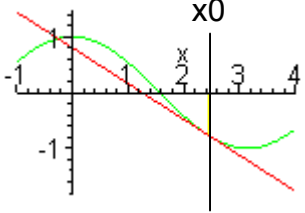
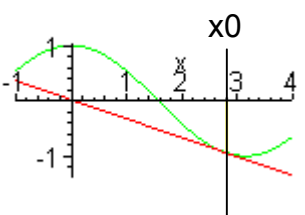
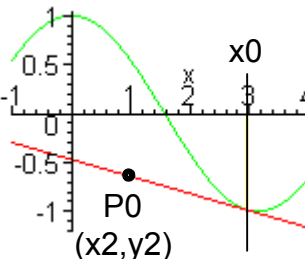
Wenn die Determinante der Faktorenmatrix null gibt, gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen. (Gelöst wird es am einfachsten mit der Vorlage im Mapel (Gleichungssysteme (linalg))).

An einem 1*1 Gleichungssystem können wir uns das gut vorstellen:

Determinante	Wenn $a=0$	Keine Lösung Division durch 0!!!
$a \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$	$a, b=0$	∞ - viele Lösungen
	$a \neq 0$	Genau eine Lösung

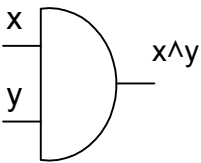
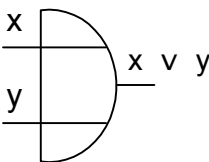
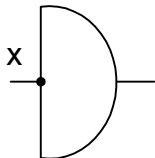
1.8. TANGENTEN-GLEICHUNG

Ein bekanntes Beispiel der Differenzialanwendung ist das anlegen einer Tangente an eine Kurve in einem bestimmten Punkt oder durch einen bestimmten Punkt.

<p>1. Tangente an eine Funktion in einem bestimmten Punkt (x_0)</p> <p>Die Steigung (a) der Tangente der Wert der Ableitung der Stammfunktion in diesem Punkt.</p> <p>Die Verschiebung (b) auf der y-Achse..</p>	<p>Tangentengleichung:</p> $y_t = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ <p>Steigung:</p> $a = f'(x_0) \cdot x$ <p>Verschiebung:</p> $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$	 <p>x = gehört zur neuen Gleichung</p>
<p>2. Tangente an eine Funktion durch den Nullpunkt.</p> <p>!!! Die Verschiebung ist 0!!!</p>	<p>Verschiebung = 0</p> $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) = 0$ <p>➡ $x_0 = \text{Bestimmbar}$</p> <p>Steigung (a) Ist bestimmbar durch einsetzen des oben berechneten (x_0)</p>	
<p>3. Tangente durch einen bestimmten Punkt der Zeichenebene</p>	<p>In der Tangentengleichung ($x \setminus y$) durch P₀ ($x_2 \setminus y_2$) ersetzen:</p> $y_2 = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_0) + f(x_0)$ <p>Auflösen nach x_0.</p> <p>Und nach den oben genannten Formeln a und b errechnen.</p>	

2. BOOLSCH'E ALGEBRA

2.1. VERKNÜPFUNGEN:

Verknüpfung	Gate - Darstellung	Algebraische Darstellung
Konjunktion "und / and"		$x \cdot y$
Disjunktion "oder / or"		$x + y$
Negation		\bar{x}

2.2. NORMALFORMEN (NORMALISIEREN)

Konjunktive Normalform:

Vorgehensweise im Booleschen-Algebra Skript (S 6):

Wenn die Konjunktive Normalform erreicht ist, durch erweitern in die **Kanonische Normalform** bringen.

	Schritt	$f(a, b, c) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{c})$
1.	Erweitern mit den fehlenden Argumenten	$= ((\bar{a} + \bar{b}) + c \cdot \bar{c}) \cdot ((\bar{a} + \bar{c}) + (b \cdot \bar{b}))$
2.	"Ausmultiplizieren" und eliminieren von Doppelaufführungen	$= (\bar{a} + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c})$

Disjunktive Normalform:

Vorgehensweise im Booleschen-Algebra Skript (S 6):

Wenn die disjunktive Normalform erreicht ist, durch erweitern in die **Kanonische Normalform** bringen.

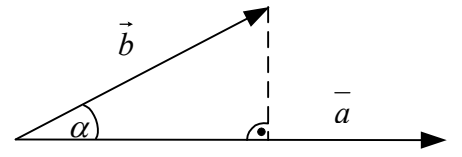
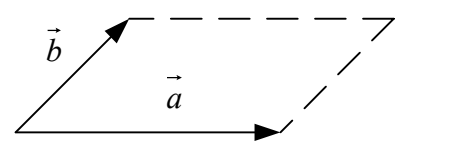
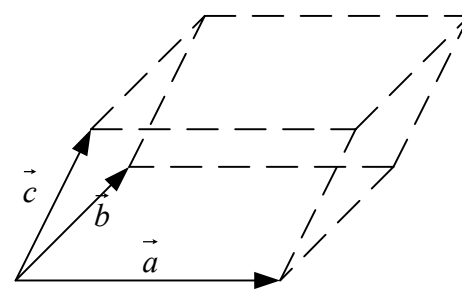
	Schritt	$f(a,b,c) = \bar{a} + \bar{a}bc$
1.	Erweitern mit den fehlenden Argumenten	$= \bar{a} \cdot (b + \bar{b}) \cdot (c + \bar{c}) + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
2.	“Ausmultiplizieren“ und eliminieren von Doppelaufführungen	$= \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

Die Wahrheitstabelle

a	b	c	$f(a,b,c)$	Minterme aus der Kanonischen disjunktiven Normalform	Maxterme aus der Kanonischen konjunktiven Normalform
0	0	0	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	
0	0	1	1	$\bar{a}\bar{b}c$	
0	1	0	1	$\bar{a}b\bar{c}$	
0	1	1	1	$\bar{a}bc$	
1	0	0	1	$a\bar{b}\bar{c}$	
1	0	1	0		$(\bar{a} + b + \bar{c})$
1	1	0	0		$(\bar{a} + \bar{b} + c)$
1	1	1	0		$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

3. VEKTOR GEOMETRIE

3.1. GRUNDREGELN

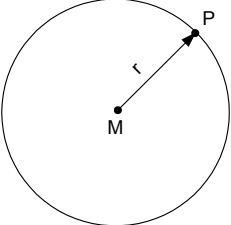
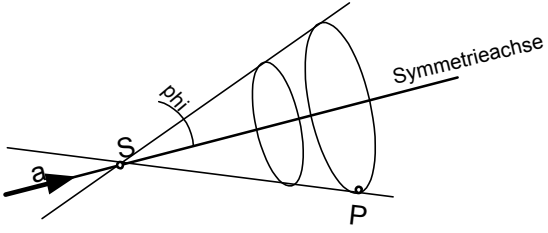
Skalarprodukt Beschreibt die Unterstützung eines Vektors auf einen anderen.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\alpha)$ $= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	
Kreuzprodukt Beschreibt die Parallelogrammfläche die von zwei Vektoren aufgespannt wird.	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\alpha)$ $= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$	
Spatprodukt: Das Spatprodukt beschreibt das Volumen eines Körpers, beschrieben durch drei Vektore.	$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	

3.2. EBENEN

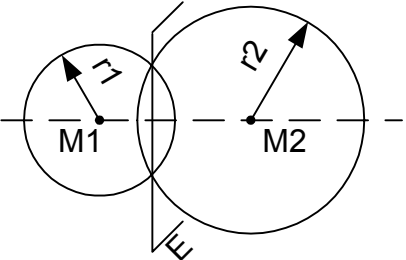
Eine Ebene ist definiert durch den Normalenvektor und einen Punkt auf der Ebene.

Normalenvektor	Lösungsvektor	Beliebiger Punkt auf der Ebene
$n = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$
Ebenengleichung: $(n \cdot x = [\text{Resultat das man erhält wenn man A einsetzt!!!}])$		
$E = 2 \cdot x - 5 \cdot y + 6 \cdot z = 13$		

3.3. RAUMFLÄCHEN

Kugel $M = (a, b, c)$ $P = (x, y, z)$ r	$ \overrightarrow{MP} = r$ \Rightarrow $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$	
Kegel (Rotationskegel) $S = \text{Scheitelpunkt}$ alle Punkte P haben einen Winkel (phi) zur Achse.	Einfacher Kegel $\vec{a} \cdot \overrightarrow{SP} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{SP} \cdot \cos \varphi$ Doppelkegel: $(\vec{a} \cdot \overrightarrow{SP})^2 = \vec{a} ^2 \cdot \overrightarrow{SP} ^2 \cdot (\cos \varphi)^2$	

3.4. SPEZIELLES IM VEKTORRECHNEN

Schnittfläche von zwei Kugeln Durch gleichsetzen der beiden Kugelgleichungen erhält man die Schnittebene.	Kugelgleichung1 – Kugelgleichung2=0	
--	-------------------------------------	---

4. MATRIZEN

4.1. GRUNDREGELN

4.2. EIGENWERTE, EIGENVEKTORE

Definition: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst Eigenwert der Matrix A, wenn die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad \text{eine nicht triviale Lösung hat (nicht } \vec{0} \text{)}.$$

Jeder Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ heisst Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ .

Satz: Ist \vec{x} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so sind alle Vielfachen von $\alpha \cdot \vec{x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ ohne $\{0\}$) auch Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ .

Gesucht sind alle Eigenwerte und Eigenvektore zur Matrix A .	
Das homogenen Gleichungssystem hat : - ∞ viele Lösungen - die triviale Lösung (keine Lösung)	$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Die Determinante von $(A - \lambda \cdot E) = 0$, falls der Lösungsvektor nicht der Nullvektor sein soll.	$ A - \lambda \cdot E = 0$ \Rightarrow Eigenwerte λ
Um die Eigenvektore rauszulösen, setzt man die Eigenwerte in die Gleichung ein und löst das lineare Gleichungssystem.	$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ \Rightarrow Eigenvektoren

Satz: Bei symmetrischen Matrix stehen die Eigenvektoren paarweise senkrecht aufeinander.

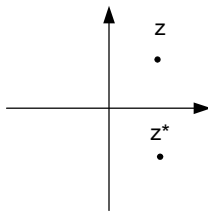
4.3. UMFORMEN EINES GLEICHUNGSSYSTEMS IN EINE MATRIX

Die Umformung eines Gleichungssystems in eine Matrix will ich an folgendem Beispiel erläutern:

Die Gleichung : $x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz + 10x + 8y - 22z + 16 = 0$	
Diese Gleichung in eine Matrix überführen:	
Die Raumfläche wird beschrieben durch diese Matrix. Diese Matrix wird auch verwendet um Eigenvektoren und Eigenwerte des Raumkörpers zu bestimmen.	Werte aus der Gleichung lesen: $A = \begin{bmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{xz}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 & \frac{yz}{2} \\ \frac{xz}{2} & \frac{yz}{2} & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$
Die Verschiebung um den Nullpunkt wird beschrieben durch:	Werte aus der Gleichung lesen: $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ -22 \end{bmatrix}$
Daraus ergibt sich folgende Gleichung: (-16 = Inhomogenität aus der Stammgleichung)	$(A \cdot \vec{x} + V) \cdot \vec{x} = -16$
$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ -22 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -16$	

5. KOMPLEXE ZAHLEN

5.1. GRUNDREGELN

Kartesische Form	$\underline{z} = a + i \cdot b$	
Eulerische Form	$\underline{z} = \varsigma \cdot e^{i(\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi)}$	$\varsigma = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(b) \cdot (1 - \text{sign}(a))$
Polarform	$\underline{z} = \varsigma \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$	
Konjugieren	$z = a + i \cdot b$ $z^* = a - i \cdot b$	
Quadratische Ergänzung	$\frac{a + i \cdot b}{m + i \cdot n} = \frac{(a + i \cdot b) \cdot (m - i \cdot n)}{(m + i \cdot n) \cdot (m - i \cdot n)} = \frac{(am + bn) + i \cdot (bm - an)}{m^2 + n^2}$	

5.2. WINKELFUNKTIONEN UND KOMPLEXE ZAHLEN

Die Winkelfunktion ausgedrückt durch die Polarfunktionen. Aus: $e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ $e^{-i \cdot \varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$ folgt:	$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$	$\cos \underline{z} = \frac{e^{i\underline{z}} + e^{-i\underline{z}}}{2}$
	$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2 \cdot i}$	$\sin \underline{z} = \frac{e^{i\underline{z}} - e^{-i\underline{z}}}{2 \cdot i}$
	$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$	$\tan \underline{z} = \frac{\sin \underline{z}}{\cos \underline{z}}$
	$\cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi}$	$\cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi}$
Hyperbolische Funktionen:	$\cosh \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$	$\cosh \underline{z} = \frac{e^{\underline{z}} + e^{-\underline{z}}}{2}$
	$\sinh \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$	$\sinh \underline{z} = \frac{e^{\underline{z}} - e^{-\underline{z}}}{2}$

5.3. POTENZIEREN

Beim Potenzieren wird der Betrag potenziert und der Winkel mit der Potenz multipliziert!!!
Die beste Ausgangslage ist die Eulerische Form.

$$\left(\underline{z} = \varsigma \cdot e^{i(\varphi+2\cdot k\cdot\pi)}\right)^2 = \varsigma^2 \cdot e^{i(2\cdot\varphi+2\cdot k\cdot\pi)}$$

5.4. RADIZIEREN

Beim Radizieren wird der Betrag radiziert und der Winkel dividiert.

Achtung: Je nach Radizierungsgrad entstehen unterschiedlich viele Lösungen, \Rightarrow
 $\underline{z}^n \Rightarrow n$ -Lösungen.

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \varsigma \cdot e^{i(\varphi+2\cdot k\cdot\pi)/n} = \sqrt[n]{\varsigma} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)}$$

5.5. MULTIPLIZIEREN KOMPLEXER ZAHLEN

Eulerische Form:

Die Beträge werden multipliziert, die Exponenten addiert:

Die kleinste Periodisierung wird übernommen

Bsp: $(2\cdot k\cdot\pi | k\cdot\pi \Rightarrow k\cdot\pi)$

$$q \cdot e^{i(\varphi+2\cdot k\cdot\pi)} \cdot p \cdot e^{i(\lambda+k\cdot\pi)}$$

$$= q \cdot p \cdot e^{i(\varphi+\lambda+k\cdot\pi)}$$

Kartesische Form:

Normale Ausmultiplikation der Faktoren

$$(a + i \cdot b) \cdot (d + i \cdot e) =$$

$$(a \cdot d - b \cdot e) + i \cdot (a \cdot e + b \cdot d)$$

5.6. DIVISION KOMPLEXER ZAHLEN

Eulerische Form:

Die Beträge werden dividiert und die Exponenten subtrahiert

Die kleinste Periodisierung wird übernommen!!!

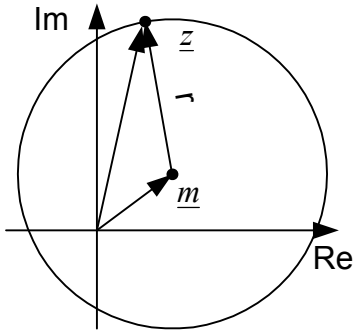
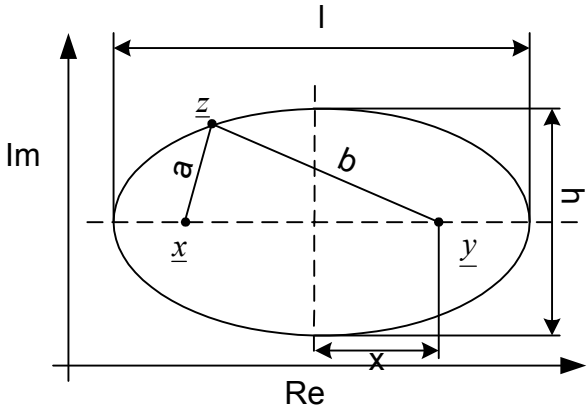
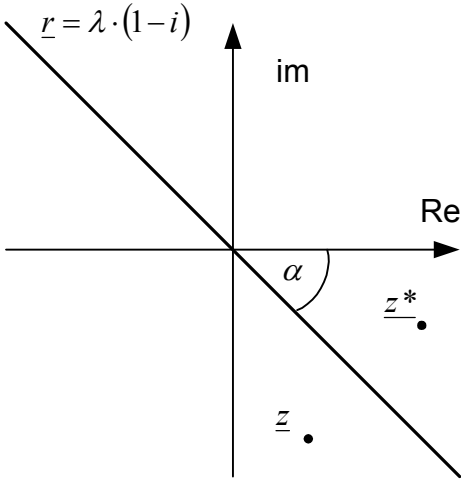
$$\frac{q \cdot e^{i(\varphi+2\cdot k\cdot\pi)}}{p \cdot e^{i(\lambda+k\cdot\pi)}}$$

$$= \frac{q}{p} \cdot e^{i(\varphi-\lambda+k\cdot\pi)}$$

5.7. KOMPLEXE GLEICHUNGEN

Wichtig: Man teilt die Komplexe Zahl immer in Imaginär- und Real-teil und setzt so zwei unabhängige Gleichungen auf.

Spezielle Gleichungen:

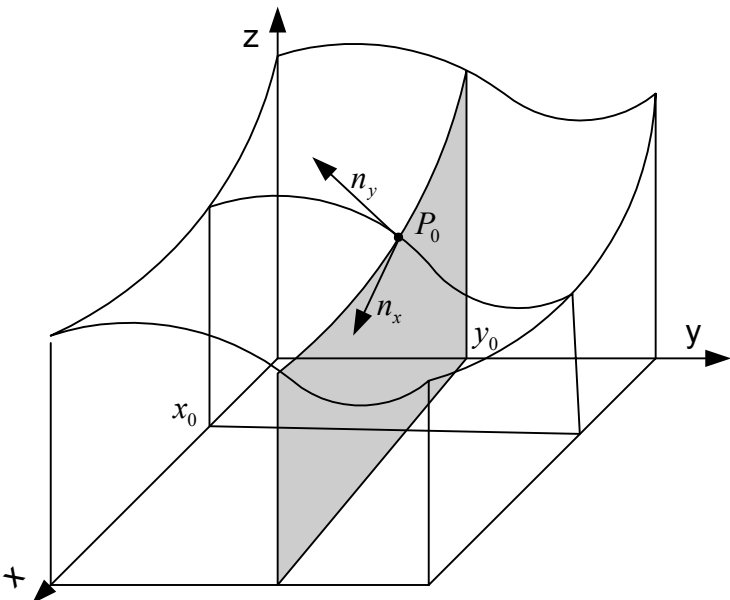
<p>Kreis:</p> <p>Der Kreis wird beschrieben durch den Mittelpunkt und dem Radius.</p>	$ \underline{z} - \underline{m} = r$ <p>Beispiel:</p> $\underline{m} = 2 + i$ $\underline{z} = a + i \cdot b$ $r = 5$ $\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = 5$	
<p>Ellipse:</p> <p>Die Ellipse wird beschrieben durch die Grosse Halbachse (l), Brennpunkte ($\underline{x}, \underline{y}$)</p>	$a + b = l \quad \Rightarrow$ $ \underline{z} - \underline{x} + \underline{z} - \underline{y} = l$ <p>Andere Formeln:</p> $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$	
<p>Spiegelung:</p> <p>Wir wollen eine komplexe Zahl an einer x beliebigen Achse auf der Zahlenebene spiegeln.</p> <p>Virtuell stellt man sich vor die Spiegelachse inkl. Punkte auf die Re-Achse zu drehen, nachher kann man die Zahl nur noch konjugieren.</p>	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\underline{z} = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi)}$ $\underline{z}^* = (\underline{z} \cdot e^{i(\alpha)})^* \cdot e^{-i(\alpha)}$	

6. MEHRDIMENSIONALE EXTREMALSTELLEN

6.1. SCHNITTDARSTELLUNG

Parallel zu zwei Achsen: Man setzt eine Variabel als Konstante (c) ein und erhält so den Schnitt in dieser Ebene.	Konstante: $x = c$	$z = (x-1)^2 + \frac{y}{2}$ $\Rightarrow z = (c-1)^2 + \frac{y}{2}$
In einer Ebene: Man ersetzt durch die Ebengleichung eine Variabel.	Ebene: $x - 7y + z = 0 \Rightarrow z = 7y - x$ Funktion: $z = (x-1)^2 + \frac{y}{2}$	Einsetzen: $y = \frac{2}{13}x^2 - \frac{2}{13}x + \frac{2}{13}$ Man erhält die Schnittkurve der Funktion mit der Ebene.

6.2. DIFFERENZIEREN EINER MEHRDIMENSIONALEN FUNKTION

		$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
Bestimmen des Tangentialvektoren: n_x	$n_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix}$	Errechnen von z: -Erst y_0 in die Stammgleichung einsetzen und nach z Ableiten. -in die Ableitung x_0 einsetzen und somit lässt sich das z errechnen.
Bestimmen des Tangentialvektoren: n_y	$n_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix}$	Errechnen von z: -Erst x_0 in die Stammgleichung einsetzen und nach z Ableiten. -in die Ableitung y_0 einsetzen und somit lässt sich das z errechnen.
Daraus folgt die Tangentialebne im Punkt P_0	Normalenvektor: $\vec{n}_x \times \vec{n}_y = \vec{n} = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{bmatrix}$	Danach nur noch den Punkt P_0 einsetzen.
	Alternative: $E := z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0)$	

6.3. EXTREMALSTELLEN IN MEHRDIMENSIONALEN FUNKTIONEN

Satz: Alle partiellen Ableitungen bis zur 2.Ordnung müssen stetig sein.	
Definition: $f(x, y)$ Die Hautfunktion $[f_x, f_y]$ Erste partielle Ableitung nach $x \setminus y$. $[f_{xx}, f_{yy}]$ Zweite partielle Ableitung nach $x \setminus y$. f_{xy} partielle Ableitung nach x und y .	
Um einen lokalen Extremalwert zu erhalten, muss: Daraus erhalten wir den Punkt $P_0(x_0, y_0)$	$f_x = 0 = f_y$
Die Entscheidung:	$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$ im Punkt: $P_0(x_0, y_0)$
1. (x_0, y_0) ist keine Extremalstelle falls:	$\Delta < 0$
2. (x_0, y_0) ist keine Extremalstelle falls:	$\Delta > 0$ i) ein lokales Minimum wenn: $f_{xx} > 0$ resp. $f_{yy} > 0$ ii) ein lokales Maximum wenn: $f_{xx} < 0$ resp. $f_{yy} < 0$